

# Mínimos cuadrados no lineales

José Luis de la Fuente O'Connor  
jldelafuente@etsii.upm.es  
josemanuel.delafuente@upm.es

# Índice

- Definición del problema
  - Estimación del estado de sistemas eléctricos
- Resolución numérica del problema
  - Método de Gauss-Newton
  - Método de Levenberg-Marquardt
  - Método de Newton

# Definición del problema

- Los **problemas no lineales de mínimos cuadrados** reales surgen de modelos matemáticos que estudian el comportamiento de sistemas económicos, sociales y físicos y se quiere **aproximarlos** a formulaciones más estándar o fáciles de manejar, aunque **no lineales** en muchos casos.
- Se trata de encontrar el mínimo de la suma de los cuadrados de  $m$  funciones no lineales; es decir,

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2$$

donde el **vector de residuos**<sup>1</sup> es  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m = [r_1(\mathbf{x}), \dots, r_m(\mathbf{x})]^T$  y cada  $r_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq n$ , es una función no lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .

---

<sup>1</sup>Si  $m = n$  se tiene un sistemas de ecuaciones no lineales como los que hemos estudiado.



- El problema real surge de la imposibilidad de encontrar la solución al sistema de ecuaciones  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  y se quiere adaptar una pseudosolución que mejor la aproxime —de existir— de acuerdo con la norma euclídea.
- **Ejemplo** El ajuste de funciones no lineales a datos diversos. Se trata de aproximar una función  $f(\mathbf{x}, t)$  no lineal a unos datos, definidos por ejemplo por un par  $y_i$  (valor) y  $t_i$  (tiempo),  $(y_i, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- Si  $r_i(\mathbf{x})$  representa el error en la predicción que hace el modelo de la observación  $i$ ,

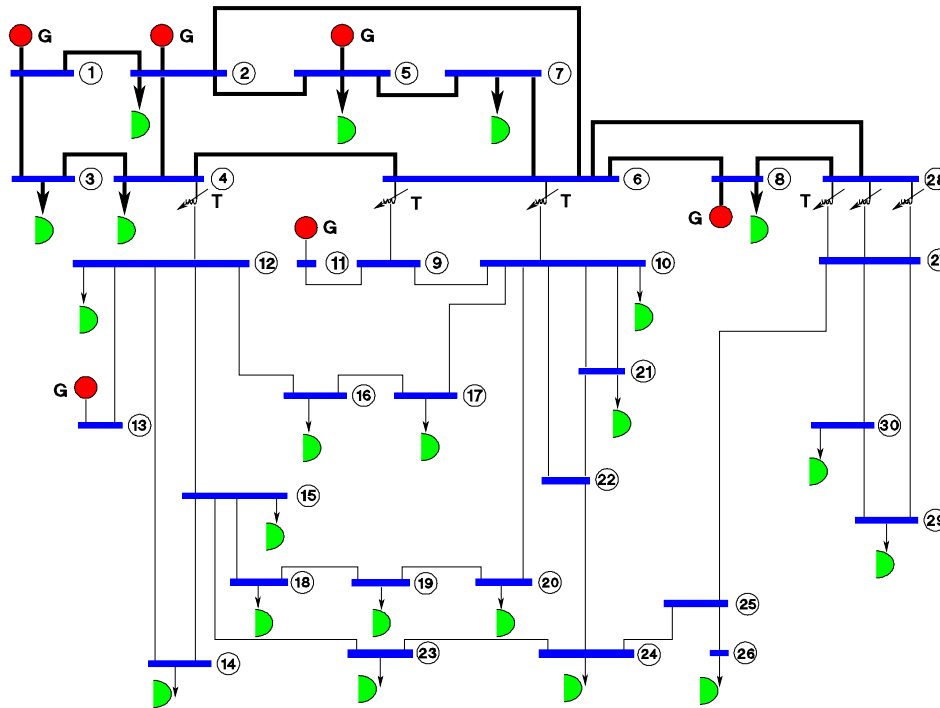
$$r_i(\mathbf{x}) = y_i - f(\mathbf{x}, t_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

y se quiere minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores reales y los predichos con el modelo, se llega a un problema del tipo

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2$$

# Estimación del estado de sistemas eléctricos

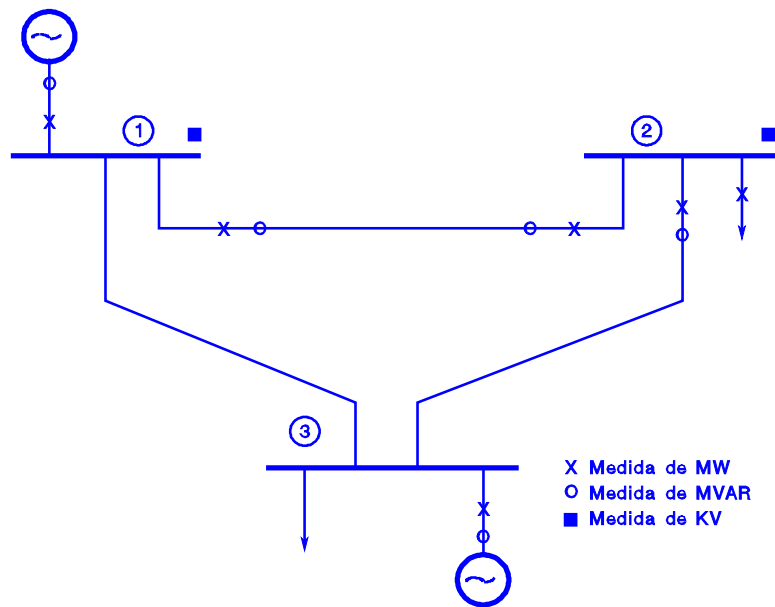
- La **estimación del estado** es el proceso por el cual se determina el valor del vector de variables que rigen un sistema a partir de unos datos proporcionados por medidas efectuadas al mismo.
- Estas medidas no se pueden realizar con precisión absoluta, debido a la **imperfección operativa de los aparatos** que las registran. Para aumentar la certeza sobre sus resultado se disponen con un grado notable de redundancia.
- El proceso matemático de la estimación se basa en maximizar o minimizar unos criterios estadísticos determinados. El **criterio más usado** es el de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores reales —medidas— y los estimados.



- En la operación, análisis y planificación de sistemas eléctricos de energía, uno de los asuntos de más relevancia técnica y económica es el de la **estimación del estado de funcionamiento del sistema de generación y transporte.**

- Para estimar el estado del sistema se instalan en su red física unos aparatos de medida que proporcionan el valor de diversas magnitudes de funcionamiento: tensiones en diversos puntos, flujos de potencia activa y reactiva por elementos de transporte, potencias activa y reactiva inyectadas, etc.
- Si todas estas medidas fuesen perfectas en un estado de operación concreto, las relaciones matemáticas que modelizan las leyes físicas que rigen su funcionamiento permitirían determinar la solución única de ese estado.
- Los errores aleatorios que incorporan los aparatos de medida introducen una incompatibilidad matemática en aquellas relaciones, por lo que el cálculo de la solución exacta no es posible teniendo que sustituirse por una estimación de la más probable.

- Con el fin de aumentar la bondad de la estimación, así como poder identificar mediciones erróneas, el número de medidas que se efectúa suele ser **redundante**: bastante superior al estrictamente necesario para determinar el estado de funcionamiento real. Ejemplo:





- Recordemos las expresiones

$$P_i = |V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (G_{p_{ij}} + G_{s_{ij}}) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_j| [G_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j)]$$

$$Q_i = -|V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (B_{p_{ij}} + B_{s_{ij}}) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_j| [G_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j) - B_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j)]$$

donde:  $V_i$  es el módulo de la tensión en el nudo  $i$ ;  
 $\theta_i$  el argumento de la tensión en el nudo  $i$ ;  
 $G_{s_{ij}}$  la conductancia serie (constante) de la línea que une el nudo  $i$  con el nudo  $j$ ;  
 $G_{p_{ij}}$  la conductancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo  $i$  con el  $j$ ;  
 $B_{s_{ij}}$  la susceptancia serie (constante) de la línea que une el nudo  $i$  con el nudo  $j$ ; y  
 $B_{p_{ij}}$  la susceptancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo  $i$  con el  $j$ .

- Los flujos de potencias activa y reactiva entre dos nudos  $i$  y  $j$  de una red están dados por las relaciones

$$P_{ij} = |V_i|^2 G_{s_{ij}} - |V_i| |V_j| G_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) - |V_i| |V_j| B_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j) + |V_i|^2 G_{p_{ij}}$$

$$Q_{ij} = -|V_i|^2 B_{s_{ij}} - |V_i| |V_j| G_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j) + |V_i| |V_j| B_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) - |V_i|^2 B_{p_{ij}}.$$

- En términos matemáticos, si se tiene una muestra  $b_1, b_2, \dots, b_m$  que define una medida de todos los aparatos, el sistema de ecuaciones que relaciona estas mediciones con las variables de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se puede expresar como

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\&\vdots \\f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_m,\end{aligned}$$

donde  $m \gg n$ . Se supone que cada uno de los elementos de la función vectorial  $f(x)$  es exacto.

- Este sistema, debido a la imprecisión de los aparatos, suele ser matemáticamente incompatible, aunque esta incompatibilidad suele ser muy pequeña al ser pequeñas esas imprecisiones.

- Para el ejemplo de tres nudos de la figura anterior, tomando  $\theta_1 = 0$  como referencia de ángulos, los parámetros que definen el sistema son los de esta tabla.

| $\mathbf{b}$ | $\mathbf{x}$ | $\mathbf{f}(\mathbf{x})$   |
|--------------|--------------|--|
|              |              | $V_1$  |
|              |              | $V_2$  |
| $V_1$        |              | $V_1^2 \sum_{j=2,3} (G_{p1j} + G_{s1j}) - V_1 \sum_{j=2,3} V_j (G_{1j} \cos(\theta_1 - \theta_j) + B_{1j} \sin(\theta_1 - \theta_j))$  |
| $V_2$        |              | $-V_1^2 \sum_{j=2,3} (B_{p1j} + B_{s1j}) - V_1 \sum_{j=2,3} V_j (G_{1j} \sin(\theta_1 - \theta_j) - B_{1j} \cos(\theta_1 - \theta_j))$ |
| $P_1$        |              | $V_2^2 \sum_{j=1,3} (G_{p2j} + G_{s2j}) - V_2 \sum_{j=1,3} V_j (G_{2j} \cos(\theta_2 - \theta_j) + B_{2j} \sin(\theta_2 - \theta_j))$  |
| $Q_1$        | $V_1$        | $V_2^2 \sum_{j=1,3} (G_{p2j} + G_{s2j}) - V_2 \sum_{j=1,3} V_j (G_{2j} \cos(\theta_2 - \theta_j) + B_{2j} \sin(\theta_2 - \theta_j))$  |
| $P_2$        | $V_2$        | $V_3^2 \sum_{j=1,2} (G_{p3j} + G_{s3j}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j) + B_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j))$  |
| $P_3$        | $\theta_2$   | $V_3^2 \sum_{j=1,2} (G_{p3j} + G_{s3j}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j) + B_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j))$  |
| $Q_3$        | $\theta_2$   | $-V_3^2 \sum_{j=1,2} (B_{p3j} + B_{s3j}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j) - B_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j))$ |
| $P_{12}$     | $V_3$        | $-V_3^2 \sum_{j=1,2} (B_{p3j} + B_{s3j}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j) - B_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j))$ |
| $Q_{12}$     | $\theta_3$   | $V_1^2 G_{s12} - V_1 V_2 (G_{s12} \cos(\theta_1 - \theta_2) + B_{s12} \sin(\theta_1 - \theta_2)) + V_1^2 G_{p12}$                      |
| $P_{21}$     |              | $-V_1^2 B_{s12} - V_1 V_2 (G_{s12} \sin(\theta_1 - \theta_2) - B_{s12} \cos(\theta_1 - \theta_2)) - V_1^2 B_{p12}$                     |
| $Q_{21}$     |              | $V_2^2 G_{s21} - V_1 V_2 (G_{s21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + B_{s21} \sin(\theta_2 - \theta_1)) + V_2^2 G_{p21}$                      |
| $P_{23}$     |              | $-V_2^2 B_{s21} - V_1 V_2 (G_{s21} \sin(\theta_2 - \theta_1) - B_{s21} \cos(\theta_2 - \theta_1)) - V_2^2 B_{p21}$                     |
| $Q_{23}$     |              | $V_2^2 G_{s23} - V_2 V_3 (G_{s23} \cos(\theta_2 - \theta_3) + B_{s23} \sin(\theta_2 - \theta_3)) + V_2^2 G_{p23}$                      |
|              |              | $-V_2^2 B_{s23} - V_2 V_3 (G_{s23} \sin(\theta_2 - \theta_3) - B_{s23} \cos(\theta_2 - \theta_3)) - V_2^2 B_{p23}$                     |

- Al no existir solución exacta del sistema, para poder estimar una que se acerque en algún sentido a esa ideal inalcanzable, es necesario definir un criterio, métrica (o **estimador**) en  $\mathbb{R}^n$  que evalúe la bondad de una **pseudosolución** de ella. Los más usados son:
  - El de **mínimos cuadrados**.
  - El de **máxima verosimilitud**.
- El **estimador de mínimos cuadrados** elige como criterio de aproximación de la solución

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m (b_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n))^2$$

y como objetivo hacer mínima la función  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

minimizar  $\Phi(x)$   
 $x \in \mathbb{R}^n$

- El de máxima verosimilitud es idéntico al de mínimos cuadrados cuando los errores de las mediciones tienen una distribución de probabilidad  $N(0, \sigma)$ : Ambos convergen en probabilidad a  $x$ , son asintóticamente normales y consistentes para  $m \rightarrow \infty$ .
- Si un determinado aparato suministra la medida  $b$ , siendo  $b^{real}$  la que debería dar si la precisión de la medición fuese total, se tendrá que

$$b = b^{real} + \eta,$$

donde  $\eta$  es el error aleatorio propio del aparato de medida.

- Si  $\eta$  no está sesgado, su función de densidad de probabilidad

$$FDP(\eta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}$$

es la normal de media cero y desviación típica  $\sigma$ .

- Como la media de  $\eta$  se supone cero, la media de la muestra real de  $b$  es  $b^{real}$ . La función de densidad de probabilidad de  $b$  es

$$FDP(b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b-b^{real})^2}{2\sigma^2}}$$

- Si se tiene un vector de  $m$  medidas,  $\mathbf{b}$ , en el que cada uno de sus elementos o coeficiente tiene una función de densidad de probabilidad como la descrita, la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra  $b_1, \dots, b_m$ , supuestas todas las medidas independientes unas de otras, es

$$FDP(b_1, \dots, b_m) = FDP(b_1) \cdot FDP(b_2) \cdots FDP(b_m) = \prod_{i=1}^m FDP(b_i).$$

A esta función se la denomina **verosimilitud** de los parámetros (los  $b_i^{real}$ ) y se designa por  $L(b_1^{real}, \dots, b_m^{real}) = L(\mathbf{b}^{real})$ .

- Si se quiere hacer máxima la verosimilitud (probabilidad) de que se obtenga como medida real la de la muestra  $\mathbf{b}$ ,

$$L(\mathbf{b}^{real}) = \prod_{i=1}^m \left( \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\sum_{i=1}^m \frac{(b_i - b_i^{real})^2}{2\sigma_i^2}},$$

habrá que maximizar  $L$  o, lo que debe conseguir el mismo efecto,  $\ln L(\mathbf{b}^{real})$ .

- Ahora bien, maximizar la función  $\ln L(\mathbf{b}^{real})$  es lo mismo que

$$\text{maximizar} \left[ -\sum_{i=1}^m \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi}) - \sum_{i=1}^m \frac{(b_i - b_i^{real})^2}{2\sigma_i^2} \right].$$

- Como  $-\sum_{i=1}^m \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi})$  es constante, este problema equivale a

$$\text{minimizar} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{(b_i - b_i^{real})^2}{2\sigma_i^2} \right].$$

- Los parámetros  $b^{real}$  se relacionan a través de las variables de estado por la función no lineal antes mencionada

$$b^{real} = f(\mathbf{x}),$$

donde  $\mathbf{x}$  es el **vector de variables de estado**: las **tensiones** en los nudos de la red y **las tomas** de los transformadores con regulación.



- El problema expresado en forma matricial resulta

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} [\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \Theta^{-1} [\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})],$$

donde la matriz

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

es la **matriz de covarianzas** de las mediciones.

- Como esta matriz es definida positiva, su inversa se puede expresar de la forma  $\Theta^{-1} = \mathbf{W}^T \mathbf{W}$ , dando lugar a la formulación

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \|\mathbf{W}(\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))\|_2^2$$

**idéntica** en estructura al que planteábamos con el estimador de mínimos cuadrados.

## Resolución numérica del problema

- Hay que resolver  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , un sistema de  $m$  ecuaciones no lineales con  $n$  incógnitas. En principio  $m \gg n$ .
- Como se hizo cuando  $m = n$ , lo natural es generar un proceso iterativo de aproximación punto a punto a la solución en el que  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  se modelice en cada uno de ellos mediante desarrollo en serie de Taylor hasta primeras derivadas del tipo

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{p}$$

y se resuelva este sistema lineal, que será en general **incompatible**.

- La solución por mínimos cuadrados de cada uno de estos sistemas, como en el caso de Newton-Raphson, será una nueva dirección de movimiento a un nuevo punto del proceso iterativo que nos aproxime a la solución.

## Método de Gauss-Newton

- I – Definir un  $\mathbf{x}_0$ ; hacer  $k = 1$  y  $\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_0$
- II – Determinar  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\|_2^2$
- III – Si  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_k < Tol$ , parar: problema resuelto;  
si no, hacer  $k = k + 1$ ,  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$  e ir al paso II.

- El subproblema del punto II es un problema lineal

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2,$$

por lo que se puede resolver con los métodos que conocemos para mínimos cuadrados lineales: ecuaciones normales, factorización QR, descomposición en valores singulares, etc.

- **Ejemplo** Mediante Gauss-Newton, resolviendo los subproblemas mediante el operador \ de **Matlab**, determinar  $x_1$  y  $x_2$  de la función  $e^{x_1+tx_2}$  que mejor ajuste los pares de puntos

$$\{(t_i, y_i)\} = \{(-2, 1/2), (-1, 1), (0, 2), (1, 4)\}.$$

La función  $r(\mathbf{x})$  es  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ; su matriz Jacobiana es

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1-2x_2} & -2e^{x_1-2x_2} \\ e^{x_1-x_2} & -e^{x_1-x_2} \\ e^{x_1} & 0 \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}.$$

- Desde  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$ , el código **Matlab** que lo resuelve es este.

```
function GN111(fx,x)           % Gauss-Newton
    tol=sqrt(eps); dnor=1.0;
    while dnor>tol
        [f J] = fx(x);
        p=J\f';
        x=x-p;
        dnor=norm(p,inf)/norm(x,inf);
        s=norm(f)^2;
        fprintf(' %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e\n',x,s,dnor);
    end
end
```

```
function [f J]=GaNew(x)
    f(1)=exp(x(1)-2*x(2))-0.5;
    f(2)=exp(x(1)-1.0*x(2))-1.0;
    f(3)=exp(x(1))-2.0;
    f(4)=exp(x(1)+x(2))-4.0;
    if nargin<2, return, end
    J(1,1)=exp(x(1)-2.0*x(2)); J(1,2)=-2*exp(x(1)-2*x(2));
    J(2,1)=exp(x(1)-x(2));     J(2,2)=-exp(x(1)-x(2));
    J(3,1)=exp(x(1));          J(3,2)=0;
    J(4,1)=exp(x(1)+x(2));     J(4,2)=exp(x(1)+x(2));
end
```

- El proceso hasta la solución  $\mathbf{x} = [\ln 2, \ln 2]^T$ , con

```
>> GN111(@GaNew, [1;1])
```

es el de esta tabla

| $k$ | $x_1$              | $x_2$              | $\ r\ _2^2$      | $\ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\ _\infty / \ \mathbf{x}_k\ _\infty$ |
|-----|--------------------|--------------------|------------------|--|
| 1   | 7.5406407460540E-1 | 7.8581936682613E-1 | 4.6113768156e-01 | 3.1296749716e-1  |
| 2   | 6.9782818348320E-1 | 6.9931189327404E-1 | 2.0073845116e-03 | 1.2370370632e-1  |
| 3   | 6.9317290130691E-1 | 6.9317774998543E-1 | 5.3683607855e-08 | 8.8493084521e-3  |
| 4   | 6.9314718125839E-1 | 6.9314718138758E-1 | 3.9452570113e-17 | 4.4101156284e-5  |
| 5   | 6.9314718055994E-1 | 6.9314718055994E-1 | 8.0118685687e-31 | 1.1940287961e-9  |

La salida de **Matlab**

```
>> GN111(@GaNew,[1;1])
7.5406407955e-01 7.8581936683e-01 1.2019085869e+01 3.1296749716e-01
6.9782818219e-01 6.9931189370e-01 4.6113768156e-01 1.2370370632e-01
6.9317290132e-01 6.9317774998e-01 2.0073845116e-03 8.8493084521e-03
6.9314718126e-01 6.9314718139e-01 5.3683607855e-08 4.4101156284e-05
6.9314718056e-01 6.9314718056e-01 3.9452547217e-17 1.1940285355e-09
```

## Método de Levenberg-Marquardt

- Se formuló inicialmente en 1944 por Kenneth Levenberg, EE.UU., 1919-1973, y se desarrolló en 1963 por Donald W. Marquardt, EE.UU., 1929-1997.
- Para evitar las dificultades del de Gauss-Newton cuando a lo largo del proceso la matriz Jacobiana no tiene rango completo o está mal condicionada, se propuso que la dirección  $\mathbf{p}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$  saliese de la solución del subproblema

$$\min_{\|\mathbf{p}_k\| \leq \Delta_k} \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)\mathbf{p}_k\|_2^2,$$

supuesto que se conoce un número  $\Delta_k$  tal que el modelo lineal de  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_k)$  representa suficientemente bien la función dentro de la esfera de confianza de radio  $\Delta_k$ .

- Si la función decrece en esta dirección, se hace  $\mathbf{x} + \mathbf{p}$  el nuevo punto del proceso y se adapta  $\Delta$  con algún criterio. Si no decrece, y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ , se modifica la estrategia con  $\Delta$  para que en la próxima iteración se mejore la función.

- Si la dirección del subproblema, sin tener en cuenta la restricción  $\|\mathbf{p}_k\| \leq \Delta_k$ , verifica ésta, el paso sería el mismo; si no, se puede comprobar que existirá un  $\lambda > 0$  tal que

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{p}^{LM} = -\mathbf{J}^T \mathbf{r},$$

$$\lambda(\Delta - \|\mathbf{p}^{LM}\|) = 0,$$

por lo que  $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}^{LM}$  sería una solución del subproblema que satisface  $\|\mathbf{p}_k\| = \Delta_k$ .

- Estas condiciones son una adaptación a este problema de otras generales para problemas de optimización con condiciones, como es el caso que impone el estar dentro de la región de confianza.

- El método, implícitamente, es una permanente **elección** entre la dirección de **Gauss-Newton** y la de **máxima pendiente**, o alguna entre ambas.

- En efecto:

- Cuando  $\lambda = 0$  se tiene la dirección de Gauss-Newton

$$\mathbf{p}_k^{LM} = -(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_k))^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{r}(\mathbf{x}_k).$$

- Cuando  $\lambda$  es muy grande

$$\mathbf{p}_k^{LM} \approx -\frac{1}{\lambda} \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{r}(\mathbf{x}_k),$$

por lo que la dirección es colineal con la de máxima pendiente.



- La que sigue es una versión algorítmica del método, con una adaptación del parámetro  $\lambda$  de iteración en iteración<sup>2</sup> muy simple.

```
I - Definir un  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ; hacer  $\lambda = 0,01$ ,  $k = 1$  y  $\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_0$ 
II - Calcular  $\mathbf{p}_k = -(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_k) + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)$ 
III - if ( $\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k)\|_2^2 < \|\mathbf{r}(\mathbf{x}_k)\|_2^2$ ) then
    si  $\mathbf{p}_k \leq Tol$ , parar: problema resuelto
    si  $\mathbf{p}_k > Tol$ , hacer:
         $\lambda \leftarrow \lambda/10$ 
         $k \leftarrow k + 1$ 
         $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \mathbf{p}$ 
    y volver al paso II
else
     $\lambda \leftarrow 10 \cdot \lambda$ 
    Volver al paso II sin tener que calcular  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ 
end
```

---

<sup>2</sup>Otras formas de cambiar  $\lambda$  son las que se estudian al presentar los métodos de región de confianza para minimizar funciones sin condiciones.

- **Ejemplo** Mediante Levenberg-Marquardt, ajustar a la función

$$f(x) = \frac{b_1}{1 + b_2 e^{tb_3}}$$

el conjunto de puntos de la tabla.

| $t_i$ | $y_i$  | $t_i$ | $y_i$  |
|-------|--------|-------|--------|
| 1     | 5,308  | 7     | 31,443 |
| 2     | 7,24   | 8     | 38,558 |
| 3     | 9,638  | 9     | 50,156 |
| 4     | 12,866 | 10    | 62,948 |
| 5     | 17,069 | 11    | 75,995 |
| 6     | 23,192 | 12    | 91,972 |

- Partiendo de  $x_0 = [200, 30, -0,4]^T$ , el código **Matlab** que lo resuelve es este

```
function Levmar_99
% Levenberg-Marquardt
m=12; n=3; x=[200;30;-0.4]; mu=0.01; J=zeros(m,n);
jtj=zeros(n,n); dnor=1; f=fx(x);
tol=sqrt(eps)*norm(x,inf); update=1;

while dnor>tol
if update==1
f=fx(x); J=derf(x);
jtj=J'*J;
res=norm(f)^2;
end
a=jtj+mu*eye(n);
s=a\(J'*f);
b=x-s;
f1=fx(b);
res1=norm(f1)^2;
if res1<res
x=b; f=f1;
dnor=norm(s,inf)/norm(x,inf);
fprintf('%15.10e %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e\n',...
x,res1,mu,dnor);
mu=mu/10; update=1;
else
mu=mu*10; update=0;
end
end

function f=fx(x)
f=zeros(12,1);
f(1) = x(1)/(1+x(2)*exp(x(3)))-5.308;
f(2) = x(1)/(1+x(2)*exp(2*x(3)))-7.24;
f(3) = x(1)/(1+x(2)*exp(3*x(3)))-9.638;
f(4) = x(1)/(1+x(2)*exp(4*x(3)))-12.866;
f(5) = x(1)/(1+x(2)*exp(5*x(3)))-17.069;
f(6) = x(1)/(1+x(2)*exp(6*x(3)))-23.192;
f(7) = x(1)/(1+x(2)*exp(7*x(3)))-31.443;
f(8) = x(1)/(1+x(2)*exp(8*x(3)))-38.558;
f(9) = x(1)/(1+x(2)*exp(9*x(3)))-50.156;
f(10) = x(1)/(1+x(2)*exp(10*x(3)))-62.948;
f(11) = x(1)/(1+x(2)*exp(11*x(3)))-75.995;
f(12) = x(1)/(1+x(2)*exp(12*x(3)))-91.972;
end
```

```
function J=derf(x)
J(1,1) = 1/(1+x(2)*exp(x(3)));
J(1,2) = -x(1)*exp(x(3))/(1+x(2)*exp(x(3)))^2;
J(1,3) = -x(1)*x(2)*exp(x(3))/(1+x(2)*exp(x(3)))^2;
J(2,1) = 1/(1+x(2)*exp(2*x(3)));
J(2,2) = -x(1)*exp(2*x(3))/(1+x(2)*exp(2*x(3)))^2;
J(2,3) = -x(1)*x(2)*exp(2*x(3))*2/(1+x(2)*exp(2*x(3)))^2;
J(3,1) = 1/(1+x(2)*exp(3*x(3)));
J(3,2) = -x(1)*exp(3*x(3))/(1+x(2)*exp(3*x(3)))^2;
J(3,3) = -x(1)*x(2)*exp(3*x(3))*3/(1+x(2)*exp(3*x(3)))^2;
J(4,1) = 1/(1+x(2)*exp(4*x(3)));
J(4,2) = -x(1)*exp(4*x(3))/(1+x(2)*exp(4*x(3)))^2;
J(4,3) = -x(1)*x(2)*exp(4*x(3))*4/(1+x(2)*exp(4*x(3)))^2;
J(5,1) = 1/(1+x(2)*exp(5*x(3)));
J(5,2) = -x(1)*exp(5*x(3))/(1+x(2)*exp(5*x(3)))^2;
J(5,3) = -x(1)*x(2)*exp(5*x(3))*5/(1+x(2)*exp(5*x(3)))^2;
J(6,1) = 1/(1+x(2)*exp(6*x(3)));
J(6,2) = -x(1)*exp(6*x(3))/(1+x(2)*exp(6*x(3)))^2;
J(6,3) = -x(1)*x(2)*exp(6*x(3))*6/(1+x(2)*exp(6*x(3)))^2;
J(7,1) = 1/(1+x(2)*exp(7*x(3)));
J(7,2) = -x(1)*exp(7*x(3))/(1+x(2)*exp(7*x(3)))^2;
J(7,3) = -x(1)*x(2)*exp(7*x(3))*7/(1+x(2)*exp(7*x(3)))^2;
J(8,1) = 1/(1+x(2)*exp(8*x(3)));
J(8,2) = -x(1)*exp(8*x(3))/(1+x(2)*exp(8*x(3)))^2;
J(8,3) = -x(1)*x(2)*exp(8*x(3))*8/(1+x(2)*exp(8*x(3)))^2;
J(9,1) = 1/(1+x(2)*exp(9*x(3)));
J(9,2) = -x(1)*exp(9*x(3))/(1+x(2)*exp(9*x(3)))^2;
J(9,3) = -x(1)*x(2)*exp(9*x(3))*9/(1+x(2)*exp(9*x(3)))^2;
J(10,1)=1/(1+x(2)*exp(10*x(3)));
J(10,2)=-x(1)*exp(10*x(3))/(1+x(2)*exp(10*x(3)))^2;
J(10,3)=-x(1)*x(2)*exp(10*x(3))*10/(1+x(2)*exp(10*x(3)))^2;
J(11,1)=1/(1+x(2)*exp(11*x(3)));
J(11,2)=-x(1)*exp(11*x(3))/(1+x(2)*exp(11*x(3)))^2;
J(11,3)=-x(1)*x(2)*exp(11*x(3))*11/(1+x(2)*exp(11*x(3)))^2;
J(12,1)=1/(1+x(2)*exp(12*x(3)));
J(12,2)=-x(1)*exp(12*x(3))/(1+x(2)*exp(12*x(3)))^2;
J(12,3)=-x(1)*x(2)*exp(12*x(3))*12/(1+x(2)*exp(12*x(3)))^2;

end
```

- La matriz jacobiana se ha calculado analíticamente. Cuando la complejidad de su cálculo es mayor, se puede aproximar por diferencias finitas.
- Los puntos del proceso iterativo que se obtienen son los de la tabla.

```
>> Levmar_99
 1 1.4756872319e+02 3.0915753991e+01 -3.3304661156e-01 3.2095285441e+02 1.0000000000e-02 3.5530074172e-01
 2 1.7485492970e+02 4.1322472852e+01 -3.1183181926e-01 1.9720323863e+01 1.0000000000e-03 1.5605054173e-01
 3 1.9441635874e+02 4.8327112423e+01 -3.1344957806e-01 2.6657614929e+00 1.0000000000e-04 1.0061616816e-01
 4 1.9613176244e+02 4.9079231125e+01 -3.1359042350e-01 2.5873011226e+00 1.0000000000e-05 8.7461799758e-03
 5 1.9618553722e+02 4.9091542376e+01 -3.1357009855e-01 2.5872773966e+00 1.0000000000e-06 2.7410166257e-04
 6 1.9618625588e+02 4.9091638512e+01 -3.1356973267e-01 2.5872773953e+00 1.0000000000e-07 3.6631679415e-06
 7 1.9618626172e+02 4.9091639449e+01 -3.1356972996e-01 2.5872773953e+00 1.0000000000e-08 2.9764224702e-08
```

- Con la Jacobiana por diferencias finitas partiendo de  $\mathbf{x} = [10, 1, 1]^T$ :

```
function Levmar_99_1
% Levenberg-Marquardt
global h
n=3; x=[10;1;1]; mu=0.01; h=sqrt(eps); dnor=1; k=0;
tol=h*norm(x,inf); update=1;
while dnor>tol
    if update==1
        f=fx(x);
        J=derf(x);
        jtj=J'*J;
        res=norm(f)^2;
    end
    a=jtj+mu*eye(n);
    s=a\(J'*f);
    b=x-s;
    f1=fx(b); res1=norm(f1)^2;
    if res1<res
        x=b;
        f=f1;
        dnor=norm(s,inf)/norm(x,inf); k=k+1;
        fprintf('%3.0f %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e\n',...
            k,x,res1,mu,dnor);
        mu=mu/10;
        update=1;
    else
        mu=mu*10;
        update=0;
    end
end
end
```

```
function f=fx(x)
f = zeros(12,1);
f(1) = x(1)/(1+x(2)*exp(x(3)))-5.308;
f(2) = x(1)/(1+x(2)*exp(2*x(3)))-7.24;
f(3) = x(1)/(1+x(2)*exp(3*x(3)))-9.638;
f(4) = x(1)/(1+x(2)*exp(4*x(3)))-12.866;
f(5) = x(1)/(1+x(2)*exp(5*x(3)))-17.069;
f(6) = x(1)/(1+x(2)*exp(6*x(3)))-23.192;
f(7) = x(1)/(1+x(2)*exp(7*x(3)))-31.443;
f(8) = x(1)/(1+x(2)*exp(8*x(3)))-38.558;
f(9) = x(1)/(1+x(2)*exp(9*x(3)))-50.156;
f(10) = x(1)/(1+x(2)*exp(10*x(3)))-62.948;
f(11) = x(1)/(1+x(2)*exp(11*x(3)))-75.995;
f(12) = x(1)/(1+x(2)*exp(12*x(3)))-91.972;
end

function J=derf(x)
global h
J = zeros(12,3);
J(1:12,1)=(fx([x(1)+h;x(2);x(3)])-fx([x(1)-h;x(2);x(3)]))/2/h;
J(1:12,2)=(fx([x(1);x(2)+h;x(3)])-fx([x(1);x(2)-h;x(3)]))/2/h;
J(1:12,3)=(fx([x(1);x(2);x(3)+h])-fx([x(1);x(2);x(3)-h]))/2/h;
end
```

- Se obtiene lo que sigue.

```
>> Levmar_99_1
 1 2.3152737458e+001 1.8021498292e+001 -1.3632831505e+001 1.1044395775e+004 1.0000000000e-002 7.3518297019e-001
 2 3.5521957325e+001 1.8106135944e+001 -1.2119438256e+001 9.2052245497e+003 1.0000000000e-002 3.4821335305e-001
 3 3.5535714828e+001 1.8690543439e+001 -1.5346094174e+000 7.3006550602e+003 1.0000000000e-002 2.9786452559e-001
 4 3.6382251480e+001 1.8685898203e+001 -5.3375592376e-001 6.3081204894e+003 1.0000000000e+002 2.7509388586e-002
 5 4.3864894722e+001 1.9510291916e+001 -7.1102849011e-001 4.2163999640e+003 1.0000000000e+001 1.7058386414e-001
 6 5.1372002147e+001 1.9466354784e+001 -4.2121047306e-001 4.0802626251e+003 1.0000000000e+001 1.4613227267e-001
 7 7.0428818614e+001 2.7344396915e+001 -5.2068992834e-001 1.1367192170e+003 1.0000000000e+000 2.7058265128e-001
 8 8.5236277490e+001 2.8137323946e+001 -3.8266075582e-001 1.0542743764e+003 1.0000000000e+000 1.7372249600e-001
 9 1.1239893980e+002 4.0287929157e+001 -3.9946571714e-001 9.4953809441e+001 1.0000000000e-001 2.4166297615e-001
10 1.2617277706e+002 4.3008165823e+001 -3.7604998322e-001 5.1169151088e+001 1.0000000000e-001 1.0916647459e-001
11 1.3399326931e+002 4.4781231173e+001 -3.7097156146e-001 2.8353413348e+001 1.0000000000e-001 5.8364814061e-002
12 1.3977022988e+002 4.5331502547e+001 -3.6390738007e-001 2.1054836175e+001 1.0000000000e-001 4.1331838508e-002
13 1.6069048866e+002 4.4865704491e+001 -3.3356360353e-001 1.8934102960e+001 1.0000000000e-002 1.3018977636e-001
14 1.8513588826e+002 4.7484943675e+001 -3.1687615138e-001 8.7955954889e+000 1.0000000000e-003 1.3204030744e-001
15 1.9533332296e+002 4.8976332187e+001 -3.1377968469e-001 2.6426289142e+000 1.0000000000e-004 5.2205299870e-002
16 1.9617433148e+002 4.9090128611e+001 -3.1357474036e-001 2.5872794922e+000 1.0000000000e-005 4.2870467197e-003
17 1.9618630640e+002 4.9091641090e+001 -3.135696799e-001 2.5872773953e+000 1.0000000000e-006 6.1038510228e-005
18 1.9618621815e+002 4.9091635363e+001 -3.1356975593e-001 2.5872773953e+000 1.0000000000e-007 4.4983495179e-007
19 1.9618623975e+002 4.9091640103e+001 -3.1356974850e-001 2.5872773953e+000 1.0000000000e-002 1.1005699249e-007
>>
```

- Algo más sofisticado para variar  $\lambda$  y su resultado es lo que sigue.

```
function [x k] = LevenbergMarquardt_2
global h
eta1=sqrt(eps); eta2=eta1; x=[10;1;1]; n = length(x); k=1; h=eta1;
f = fx(x); J = derf(x);
A = J'*J;
g = J'*f; ng = norm(g,inf);
F = (f'*f)/2;
mu = eta1 * max(diag(A));
nu = 2; stop = 0;

while ~stop
    if ng <= eta2, stop = 1;
    else
        p = (A + mu*eye(n))\-g; np = norm(p,inf);
        nx = eta2 + norm(x,inf);
        if np <= eta2*nx, stop = 2; end
    end
    if ~stop
        xnew = x + p;
        fn = fx(xnew); Jn = derf(xnew);
        Fn = (fn'*fn)/2;
        dL = (p'*(mu*p - g))/2; dF = F - Fn;
        if dL > 0 && dF > 0 % Se adapta x y m
            x = xnew; F = Fn; J = Jn; f = fn;
            A = J'*J;
            g = J'*f; ng = norm(g,inf);
            mu = mu * max(1/3, 1-(2*dF/dL-1)^3); % Fórmula adapt. mu en referencias
            nu = 2;
        else
            mu = mu*nu; nu = 2*nu;
        end
        k = k + 1;
        dnor=norm(p,inf)/norm(x,inf);
        fprintf('%3.0f %12.5e %12.5e %12.5e %12.5e %12.5e %12.5e\n',k,x,Fn,mu,dnor);
    end
end
end
```

```
function f=fx(x)
f = zeros(12,1);
f(1) = x(1)/(1+x(2)*exp(x(3)))-5.308;
f(2) = x(1)/(1+x(2)*exp(2*x(3)))-7.24;
f(3) = x(1)/(1+x(2)*exp(3*x(3)))-9.638;
f(4) = x(1)/(1+x(2)*exp(4*x(3)))-12.866;
f(5) = x(1)/(1+x(2)*exp(5*x(3)))-17.069;
f(6) = x(1)/(1+x(2)*exp(6*x(3)))-23.192;
f(7) = x(1)/(1+x(2)*exp(7*x(3)))-31.443;
f(8) = x(1)/(1+x(2)*exp(8*x(3)))-38.558;
f(9) = x(1)/(1+x(2)*exp(9*x(3)))-50.156;
f(10) = x(1)/(1+x(2)*exp(10*x(3)))-62.948;
f(11) = x(1)/(1+x(2)*exp(11*x(3)))-75.995;
f(12) = x(1)/(1+x(2)*exp(12*x(3)))-91.972;
end

function J=derf(x)
global h
J = zeros(12,3);
J(1:12,1)=(fx([x(1)+h;x(2);x(3)])-fx([x(1)-h;x(2);x(3)]))/2/h;
J(1:12,2)=(fx([x(1);x(2)+h;x(3)])-fx([x(1);x(2)-h;x(3)]))/2/h;
J(1:12,3)=(fx([x(1);x(2);x(3)+h])-fx([x(1);x(2);x(3)-h]))/2/h;
end
```



```
>> [X]=LevenbergMarquardt_2
 2 1.00000e+001 1.00000e+000 1.00000e+000 6.09210e+007 3.20327e-007 3.21187e+002
 3 1.00000e+001 1.00000e+000 1.00000e+000 6.05210e+007 1.28131e-006 3.20139e+002
 4 1.00000e+001 1.00000e+000 1.00000e+000 5.82011e+007 1.02050e-005 3.13992e+002
 5 1.00000e+001 1.00000e+000 1.00000e+000 4.17315e+007 1.64008e-004 2.66267e+002
 6 1.00000e+001 1.00000e+000 1.00000e+000 3.04228e+006 5.24824e-003 7.37065e+001
 7 3.71830e+001 2.03134e+001 -1.39754e+001 4.61905e+003 1.74941e-003 7.31060e-001
 8 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 4.13884e+003 5.83138e-004 3.12920e-001
 9 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 1.21779e+004 1.16628e-003 7.60834e+000
10 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 1.21779e+004 4.66510e-003 7.13223e+000
11 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 1.21779e+004 3.73208e-002 5.18497e+000
12 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 1.21789e+004 5.97133e-001 1.45888e+000
13 3.55330e+001 2.08570e+001 -2.85638e+000 1.08549e+004 1.91083e+001 1.25892e-001
14 3.70743e+001 2.08320e+001 -8.45833e-001 2.86866e+003 6.36942e+000 5.42303e-002
15 3.70743e+001 2.08320e+001 -8.45833e-001 4.57304e+003 1.27388e+001 3.13411e-001
16 3.70743e+001 2.08320e+001 -8.45833e-001 2.96395e+003 5.09554e+001 2.00676e-001
17 3.94274e+001 2.08200e+001 -5.56041e-001 2.67565e+003 5.09596e+001 5.96813e-002
18 4.10697e+001 2.09711e+001 -7.41820e-001 2.36432e+003 4.98849e+001 3.99886e-002
19 4.31862e+001 2.09854e+001 -5.65439e-001 2.17933e+003 4.91881e+001 4.90094e-002
20 4.48055e+001 2.11303e+001 -6.70109e-001 1.96543e+003 4.12763e+001 3.61395e-002
21 4.69944e+001 2.11853e+001 -5.62055e-001 1.78755e+003 3.59446e+001 4.65787e-002
22 4.89704e+001 2.13752e+001 -6.12569e-001 1.59878e+003 1.50058e+001 4.03496e-002
23 5.35482e+001 2.15958e+001 -5.19378e-001 1.31483e+003 1.14216e+001 8.54895e-002
24 5.77611e+001 2.22507e+001 -5.42187e-001 1.03419e+003 3.80721e+000 7.29365e-002
25 6.75450e+001 2.32354e+001 -4.43173e-001 7.28564e+002 3.60218e+000 1.44851e-001
26 7.30187e+001 2.54797e+001 -4.76258e-001 4.74737e+002 1.20073e+000 7.49634e-002
27 8.56068e+001 2.82368e+001 -4.08341e-001 3.05397e+002 1.17121e+000 1.47046e-001
28 9.17724e+001 3.22479e+001 -4.29597e-001 1.66694e+002 3.90403e+001 6.71834e-002
29 1.04566e+002 3.65437e+001 -3.98435e-001 8.96279e+001 3.14695e-001 1.22346e-001
30 1.12665e+002 4.06796e+001 -3.99237e-001 4.63231e+001 1.04898e-001 7.18929e-002
31 1.25845e+002 4.32662e+001 -3.77662e-001 2.49768e+001 8.23411e-002 1.04731e-001
32 1.35084e+002 4.48533e+001 -3.69135e-001 1.35599e+001 2.74470e-002 6.83906e-002
33 1.49370e+002 4.49653e+001 -3.48691e-001 8.04215e+000 2.53594e-002 9.56446e-002
34 1.58295e+002 4.57702e+001 -3.41526e-001 4.27044e+000 8.45312e-003 5.63779e-002
35 1.71229e+002 4.64779e+001 -3.29024e-001 2.70729e+000 7.50803e-003 7.55398e-002
36 1.79072e+002 4.73221e+001 -3.24136e-001 1.73929e+000 2.50268e-003 4.37960e-002
37 1.87986e+002 4.81609e+001 -3.18035e-001 1.42192e+000 1.63585e-003 4.74182e-002
38 1.92841e+002 4.87157e+001 -3.15399e-001 1.30936e+000 5.45282e-004 2.51780e-002
39 1.95496e+002 4.90113e+001 -3.13931e-001 1.29440e+000 1.81761e-004 1.35793e-002
40 1.96128e+002 4.90848e+001 -3.13601e-001 1.29364e+000 6.05869e-005 3.22121e-003
41 1.96184e+002 4.90914e+001 -3.13571e-001 1.29364e+000 2.01956e-005 2.88957e-004
42 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 6.73187e-006 9.74625e-006
43 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 7.08937e-006 2.54040e-007
44 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 1.41787e-005 1.27817e-006
45 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 5.67150e-005 1.27412e-006
46 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 4.53720e-004 1.25034e-006
47 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 7.25951e-003 1.06488e-006
48 1.96186e+002 4.90916e+001 -3.13570e-001 1.29364e+000 2.32304e-001 3.00599e-007
X =
 1.0e+002 *
 1.961862713737317
 0.490916428999001
 -0.003135697293093
```



## Método de Newton

- Está basado en el método de Newton para resolver problemas de optimización sin condiciones, como lo es

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2.$$

- Si la función es continua y tiene derivadas parciales hasta segundo orden continuas, el método se basa en el modelo de  $f(\mathbf{x})$  del desarrollo de Taylor hasta segundo orden de derivadas:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{p} + \mathcal{O}(\|\mathbf{p}\|^3).$$

- En esta última expresión,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T,$$

es el **vector gradiente**, y

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

la **matriz Hessiana**: La matriz Jacobiana del vector gradiente.

- En el caso de la función  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2$ ,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{x}) \nabla r_j(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}),$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m \nabla r_j(\mathbf{x}) \nabla r_j(\mathbf{x})^T + \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{x}) \nabla^2 r_j(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{x}) \nabla^2 r_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- La condición necesaria de óptimo,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , despreciando el término  $\mathcal{O}(\|\mathbf{p}\|^3)$ , conduce a un sistema lineal,  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , en este caso

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

cuya solución es la dirección de movimiento hacia el óptimo.

- El algoritmo es este:

- I – Definir un  $\mathbf{x}_0$  y condiciones de partida
- II – Resolver el sistema lineal  $\nabla f(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$
- III – Si  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_k < Tol$ , parar: el problema está resuelto;  
si no, hacer  $k = k + 1$ ,  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$  e ir al paso II

Lo costoso de este procedimiento es calcular la matriz Hessiana y resolver el sistema del Paso II.

- El método de Gauss-Newton se puede ver como una modificación del de Newton con la simplificación  $\nabla^2 f(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}^T \mathbf{J}$  y  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T \mathbf{r}(\mathbf{x})$ .

- Resolver por Newton el ajuste no lineal de  $e^{x_1+tx_2}$  sería así. La **complicación** de obtener la matriz **Hessiana** es considerable.

```
function LSQ_New_1(fx,x)
% Mínimos cuadrados Newton
tol=sqrt(eps); p=ones(2,1); [f grad Hess] = fx(x);
while abs(grad'*p)>tol
    p=-Hess\grad;
    x=x+p;
    [f grad Hess] = fx(x);
    fprintf(' %15.10e %15.10e %15.10e\n',x,f);
end
end
```

```
function [f g H] = Newt_Ls(x)
f=(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)^2+(exp(x(1)-x(2))-1.0)^2+(exp(x(1))-2.0)^2+(exp(x(1)+x(2))-4.0)^2;

g = [2*(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)*exp(x(1)-2*x(2))+2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+...
2*(exp(x(1))-2)*exp(x(1))+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2)); ...
-4*(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)*exp(x(1)-2*x(2))-2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+...
2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2))];

H=[2*exp(x(1)-2*x(2))^2+2*(exp(x(1)-2*x(2))-1/2)*exp(x(1)-2*x(2))+2*exp(x(1)-x(2))^2+...
2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+2*exp(x(1))^2+2*(exp(x(1))-2)*exp(x(1))+...
2*exp(x(1)+x(2))^2+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2)), ... % Coeficiente (1,1)
-4*exp(x(1)-2*x(2))^2-4*(exp(x(1)-2*x(2))-1/2)*exp(x(1)-2*x(2))-2*exp(x(1)-x(2))^2-...
2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+2*exp(x(1)+x(2))^2+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2)); %Coef (1,2)
-4*exp(x(1)-2*x(2))^2-4*(exp(x(1)-2*x(2))-1/2)*exp(x(1)-2*x(2))-2*exp(x(1)-x(2))^2-...
2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+2*exp(x(1)+x(2))^2+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2)), ... %Coef (2,1)
8*exp(x(1)-2*x(2))^2+8*(exp(x(1)-2*x(2))-1/2)*exp(x(1)-2*x(2))+2*exp(x(1)-x(2))^2+ ...
2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+2*exp(x(1)+x(2))^2+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2))]; %Coef (2,1)
end
```

- Se puede usar el cálculo de la Hessiana por diferencias finitas...

```
function LSQ_New_diff(fx,x)          % Mínimos cuadrados Newton
global h
tol=sqrt(eps); p=ones(2,1); h=sqrt(eps); [f grad Hess]=fx(x);
while abs(grad'*p)>tol
    p=-Hess\grad;
    x=x+p;
    [f grad Hess] = fx(x);
    fprintf(' %15.10e %15.10e %15.10e\n',x,f);
end
end
```

```
function [f g H] = Newt_Ls_1(x)
global h
f=(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)^2+(exp(x(1)-x(2))-1.0)^2+(exp(x(1))-2.0)^2+(exp(x(1)+x(2))-4.0)^2;
if nargin<2, return, end
g = [2*(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)*exp(x(1)-2*x(2))+2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+...
2*(exp(x(1))-2)*exp(x(1))+2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2));...
-4*(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)*exp(x(1)-2*x(2))-2*(exp(x(1)-x(2))-1)*exp(x(1)-x(2))+...
2*(exp(x(1)+x(2))-4)*exp(x(1)+x(2))];
if nargin<3, return, end
x1=[x(1)+h;x(2)]; [f1 g1]=Newt_Ls_1(x1);
H(1:2,1)=(g1-g)/h;
x1=[x(1);x(2)+h]; [f1 g1]=Newt_Ls_1(x1);
H(1:2,2)=(g1-g)/h;
end
```

```
function LSQ_New_dif_1(x)          % Mínimos cuadrados Newton
global h
    tol=sqrt(eps); h=sqrt(eps)/norm(x); p=ones(2,1);
    while abs(grad(x)'*p)>tol
        p=-Hess(x)\grad(x);
        x=x+p;
        fprintf(' %15.10e %15.10e %15.10e\n',x,fx(x));
    end
end

function f=fx(x)
f=(exp(x(1)-2*x(2))-0.5)^2+(exp(x(1)-x(2))-1.0)^2+...
    (exp(x(1))-2.0)^2+(exp(x(1)+x(2))-4.0)^2;
end

function g=grad(x)
global h
g=[(fx([x(1)+h,x(2)])-fx([x(1)-h,x(2)]))/(2*h);
    (fx([x(1),x(2)+h])-fx([x(1),x(2)-h]))/(2*h)];
end

function H=Hess(x)
global h
H(1:2,1)=(grad([x(1)+h;x(2)])-grad(x))/h;
H(1:2,2)=(grad([x(1);x(2)+h])-grad(x))/h;
end
```

```
>> LSQ_New_1(@Newt_Ls,[1;1])
8.1564455682e-001 8.6820863544e-001 2.0026578055e+000
7.3026817718e-001 7.4718705926e-001 1.5293213074e-001
6.9788477856e-001 6.9905288119e-001 1.9358782157e-003
6.9322068406e-001 6.9323478800e-001 4.3977229201e-007
6.9314719772e-001 6.9314720089e-001 2.3813689172e-014
>> LSQ_New_dif(@Newt_Ls_1,[1;1])
8.1564455807e-001 8.6820863891e-001 2.0026578782e+000
7.3026818132e-001 7.4718706243e-001 1.5293215651e-001
6.9788478088e-001 6.9905288265e-001 1.9358796093e-003
6.9322068433e-001 6.9323478806e-001 4.3977415379e-007
6.9314719772e-001 6.9314720089e-001 2.3817330783e-014
>> LSQ_New_dif_1([1;1])
8.4944340872e-01 8.7730513107e-01 2.7563553502e+000
7.5875713784e-01 6.8293863250e-01 7.8534508448e-02
6.9908967430e-01 6.9134017676e-01 5.0043933563e-04
6.9320781375e-01 6.9312744209e-01 5.0431466984e-08
6.9314718697e-01 6.9314717816e-01 5.3057457678e-16
```

● Y más:

- Por último, usando la potencia del cálculo simbólico de **Matlab** se puede conseguir algo como esto:

```
function LSQ_New_sym_2(x1,y1)           % Mínimos cuadrados Newton
    syms x y
    tol=sqrt(eps);
    f(x,y)=(exp(x-2*y)-0.5)^2+(exp(x-y)-1.0)^2+(exp(x)-2.0)^2+(exp(x+y)-4.0)^2;
    gra=gradient(f,[x y]); hes=hessian(f,[x y]);
    vec=-hes\gra;
    while abs(gra(x1,y1)'*[x1;y1])>tol
        xx=double(vec(x1,y1));
        x1=x1+xx(1); y1=y1+xx(2);
        fprintf(' %15.10e %15.10e %15.10e\n',x1,y1,double(f(x1,y1)));
    end
end
```

```
>> LSQ_New_sym_2(1,1)
 8.1564455682e-01 8.6820863544e-01 2.0026578055e+00
 7.3026817718e-01 7.4718705926e-01 1.5293213074e-01
 6.9788477856e-01 6.9905288119e-01 1.9358782157e-03
 6.9322068406e-01 6.9323478800e-01 4.3977229201e-07
 6.9314719772e-01 6.9314720089e-01 2.3813689162e-14
 6.9314718056e-01 6.9314718056e-01 7.2279874085e-29
```

Seguro que se puede estructurar un programa bastante mejor.